

MATEMATYKA

ZAKRES PODSTAWOWY

Program nauczania dla szkół ponadpodstawowych (liceum i technikum)

Autor:

Justyna Cybulska

Gdynia 2019

Spis treści

[I. Wstęp 3](#_Toc8678002)

[II. Szczegółowe cele kształcenia i wychowania 4](#_Toc8678003)

[III. Procedury i sposoby osiągania celów kształcenia i wychowania 6](#_Toc8678004)

[IV. Ramowy rozkład materiału 9](#_Toc8678005)

[V. Treści edukacyjne 10](#_Toc8678006)

[VI. Zakładane osiągnięcia uczniów 23](#_Toc8678007)

[VII. Propozycje kryteriów oceny i metod sprawdzania osiągnieć ucznia 24](#_Toc8678008)

[VIII. Ocenianie uczniów o specjalnych i specyficznych potrzebach edukacyjnych 27](#_Toc8678009)

I. Wstęp

Program nauczania obejmuje wszystkie treści określone dla edukacji matematycznej w zakresie podstawowym dla czteroletniego liceum ogólnokształcącego i pięcioletniego technikum w Rozporządzeniu Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 stycznia 2018 r. w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia.

Został tak zbudowany, aby można było w nim łatwo odnaleźć potrzebne hasła i wykaz umiejętności, które powinni zdobyć uczniowie. Pracujący z nim nauczyciel może dostosować go do potrzeb danej grupy uczących się lub na jego bazie stworzyć własny program do indywidualnej pracy z uczniem o specyficznych bądź specjalnych potrzebach edukacyjnych. Zatem zawarty w programie rozkład materiału należy traktować jako pewien model, dostosowany do obudowy dydaktycznej (w szczególności podręczników) programu.

Materiał programowy został podzielony na klasy, a w ich obrębie na treści i szczegółowe cele edukacyjne. Taki układ pozwoli na szybkie kontrolowanie, czy uczniowie zdobyli umiejętności określone w podstawie programowej, badane także na egzaminie maturalnym, jak również te zakładane przez nauczyciela i dostosowane do ich indywidualnych potrzeb. Uczącym się szczególnie zainteresowanym matematyką można zaproponować poszerzenie wiedzy, na przykład poprzez rozwiązywanie problemów zapisanych w podręcznikach przygotowywanych do programu.

Program może być realizowany w każdym liceum i technikum, nie wymaga bowiem specjalnych warunków bazowych. Zakłada jednak, że na zajęciach wykorzystywane będą podstawowe pomoce dydaktyczne (np. modele brył), uczniowie będą mieli możliwość korzystania z kalkulatorów oraz zestawu podstawowych wzorów matematycznych. Dobrze by było, aby w proces dydaktyczny został wzbogacony o użycie środków multimedialnych, na przykład do prezentacji prac badawczych wykonanych przez uczących się czy omawiania tematyki związanej z wykresami funkcji.

Konstrukcja programu pozwala na jego realizację w cyklu 3–4–3–4 godzin w tygodniu. Nie wszystkie jednak godziny muszą być poświęcone kształtowaniu nowych umiejętności. Nauczyciel, budując własny plan dydaktyczny, powinien zaplanować też czas na przypomnienie oraz utrwalenie wiadomości i umiejętności nabytych przez uczniów na wcześniejszych etapach edukacyjnych. Szczególnie ważne jest to w klasie programowo najwyższej, gdzie uczniowie powinni mieć czas na rozwiązywanie zadań wymagających wykorzystania kompleksowej wiedzy matematycznej i zarazem powtórzenie oraz utrwalenie materiału przed egzaminem zewnętrznym.

Sugerowane w programie metody, formy i sposoby pracy mają na celu zachęcenie nauczyciela do budowania własnych strategii dydaktycznych, dostosowanych do indywidualnych potrzeb danej grupy uczniów, tak aby umożliwić zdobycie i doskonalenie wszystkich umiejętności określonych przez cele kształcenia zapisane w podstawie programowej dla edukacji matematycznej w liceum i technikum.

Program bazuje na wiadomościach i umiejętnościach opanowanych przez uczących się w poprzednich etapach edukacyjnych, ale zarazem ma na celu porządkowanie tej wiedzy, rozszerzenie jej i pokazanie jej użyteczności, bowiem kształcenie ogólne w szkole ponadpodstawowej jest fundamentem wykształcenia, podwaliną umiejętności rozwijanych przez całe życie.

II. Szczegółowe cele kształcenia i wychowania

Budowa programu ma sprzyjać osiągnięciu celów zapisanych w podstawie programowej. Preferowany system kształcenia zakłada ograniczenie przekazu wiedzy na rzecz jej zdobywania przez uczących się, zgodnie z optymalnie zaprojektowanymi czynnościami nauczycieli – wynikającymi z pełnienia przez nich roli tutorów, facylitatorów. Tak postrzegany proces edukacyjny ma na celu kształtowanie charakteru młodego człowieka dzięki odpowiednio stawianym celom wychowawczym i przedmiotowym.

Zakładane cele wychowania, których realizację umożliwia program, to:

* kształtowanie umiejętności planowania i organizacji własnej pracy,
* rozwijanie odpowiedzialności za skutki podejmowanych decyzji,
* doskonalenie umiejętności pracy w zespole,
* rozwijanie umiejętności poszukiwania, porządkowania, analizowania i prezentowania informacji,
* wdrażanie do samodzielności, systematyczności, wytrwałości w dążeniu do rozwiązania problemu,
* kształtowanie postawy szacunku dla pracy i wytworów innych ludzi,
* rozbudzanie ciekawości poznawczej, kreatywności, krytycyzmu,
* rozwijanie myślenia komputacyjnego i samoregulacji,
* ćwiczenie umiejętności wykazywania się wysoką kulturą osobistą i podnoszenie poczucia własnej wartości.

W programie uwzględniono też cele oparte na kompetencjach kluczowych, sformułowanych w zaleceniach Parlamentu Europejskiego i Rady:

* kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
* kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
* kompetencje cyfrowe,
* kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie uczenia się,
* kompetencje w zakresie przedsiębiorczości,
* kompetencje w zakresie świadomości i ekspresji kulturalnej.

Program pozwala nauczycielowi na zrealizowanie następujących szczegółowych celów wychowania:

* umiejętność określania własnych potrzeb edukacyjnych w zakresie zdobywania wiedzy matematycznej oraz uczenia się,
* rozbudzanie zainteresowania matematyką, postrzeganą jako język do opisywania otaczającego nas świata,
* umiejętność prezentowania własnych rozwiązań postawionych przez nauczyciela problemów, przemyśleń i ich uzasadniania,
* skuteczne komunikowanie się językiem matematyki z użyciem najprostszych symboli i terminów,
* umiejętność korzystania z nowoczesnych technologii w zdobywaniu wiedzy i jej prezentowaniu,
* umiejętność wykorzystania narzędzi matematycznych w życiu codziennym.

Szczegółowe cele kształcenia matematycznego zamieszczone są w drugiej kolumnie programu nauczania w części poświęconej treściom. Wynikają one z zapisów w podstawie programowej kształcenia matematycznego dla szkoły ponadpodstawowej:

* doskonalenie umiejętności czytania ze zrozumieniem, formułowania pytań i problemów,
* klasyfikowanie, wnioskowanie, definiowanie, uzasadnianie,
* integrowanie wiedzy przedmiotowej z różnych dyscyplin,
* uzasadniania sądów, krytycznego myślenia twórczego,
* zachęcanie do praktycznego zastosowania zdobytych umiejętności,
* rozwijanie myślenia analitycznego, syntetycznego, kreatywnego abstrahowania, rozumowania, rozwiązywania problemów w twórczy sposób,
* komunikowanie się w języku ojczystym.

Program zakłada również, że uczniowie na zajęciach matematycznych osiągną cele zapisane językiem wymagań w podstawie programowej. Uczący się będą:

* interpretować teksty matematyczne, a po rozwiązaniu zadania krytycznie oceniać otrzymany wynik oraz wyciągać wnioski,
* używać dobrze znanych obiektów matematycznych,
* dobierać model matematyczny do prostej sytuacji i oceniać jego trafność,
* stosować strategię jasno wynikającą z treści zadania,
* prowadzić proste rozumowania, składające się z niewielkiej liczby kroków.
* Dzięki wykorzystaniu zestawu materiałów do kształcenia matematycznego, którego elementem jest program, uczący się będą:
* doskonalić sprawność rachunkową, w tym posługiwanie się przybliżeniami, potęgami, pierwiastkami i logarytmami (również z użyciem kalkulatorów lub komputerów),
* posługiwać językiem matematyki do opisu zjawisk z życia codziennego,
* stosować metody rachunku algebraicznego do przekształcania wzorów, rozwiązywania równań, nierówności i układów równań,
* wykorzystywać pojęcie funkcji i jej własności w rozwiązywaniu problemów teoretycznych i praktycznych,
* doskonalić umiejętności związane z ciągami arytmetycznymi geometrycznymi i ich zastosowaniami,
* analizować sytuację związaną z doświadczeniem losowym i obliczać prawdopodobieństwo określonego zdarzenia,
* wykorzystywać metody geometrii analitycznej do rozwiązywania problemów geometrycznych i algebraicznych,
* identyfikować obiekty geometryczne oraz wykorzystywać ich podstawowe własności w sytuacjach życia codziennego,
* analizować i interpretować dane statystyczne przedstawione w różny sposób.

III. Procedury i sposoby osiągania celów kształcenia i wychowania

Szybko rozwijająca się cywilizacja XXI wieku stwarza duże zapotrzebowanie na specjalistów w dziedzinach związanych z naukami ścisłymi. Kształcenie w tym zakresie jest też jednym z priorytetów Strategii Lizbońskiej. Młody człowiek, rozpoczynając kształcenie na tym etapie edukacyjnym, musi dokonać świadomego wyboru – czy będzie zgłębiał matematykę w zakresie podstawowym czy rozszerzonym. Wybiera w ten sposób nie tylko treści matematyczne, z które będzie miał opanować, ale również język komunikacji przedmiotowej. Program zakłada, że język ten będzie prosty, zrozumiały dla przeciętnego ucznia, wykorzystujący tylko w niezbędnym zakresie symbolikę matematyczną. Hasła programowe są tak poukładane, aby nowe umiejętności były rozwijane stopniowo i opierały się na wiedzy z wcześniejszych etapów edukacyjnych.

Sposoby, metody i formy pracy oraz wybór strategii dydaktycznej, która pozwoli osiągnąć nauczycielowi zakładane cele, w największym stopniu zależą do potrzeb uczących się. Dlatego bardzo ważna jest szczegółowa wstępna diagnoza umiejętności, wiadomości, predyspozycji uczących się, preferowanych przez nich sposobów uczenia się. Dopiero na podstawie wyników tych badań nauczyciel może tworzyć plan dydaktyczny dla danej klasy na cały cykl kształcenia. Powinien on uwzględniać indywidualne potrzeby uczących się i stwarzać każdemu uczniowi możliwość wyboru własnej ścieżki rozwoju intelektualnego. Program jest na tyle elastyczny, aby można go było łatwo zaadaptować zarówno dla osób wdrożonych do samokształcenia, jak i przyzwyczajonych do pracy w zespole.

Trudno jednoznacznie opisać procedury osiągania celów edukacyjnych, gdyż niejako są one zależne od stopnia zainteresowania uczących się treściami matematycznymi, środków dydaktycznych, którymi dysponuje szkoła, liczebności klas, zdolności i talentów uczących się, czasu przeznaczonego na naukę matematyki. Propozycje zawarte w tym materiale są więc jedynie wskazówkami dla nauczyciela, który buduje bazę umożliwiającą efektywną pracę z daną klasą.

Wykorzystując przedstawiony program, nauczyciel będzie mógł tak zaplanować pracę, aby stymulować uczniów do nauki, pokazując im użyteczność matematyki w praktycznych jej zastosowaniach, a zarazem niezbędność posiadania określonych sprawności matematycznych, które umożliwią łatwe poruszanie się w świecie pełnym nowoczesnych technologii. Konstrukcja programu zachęca do rozwijania procesu dydaktycznego tak, aby uczący się dobrze zrozumiał omawiane zagadnienia, ukształtował określone umiejętności i został wdrożony do samodzielnego poszukiwania rozwiązań problemów na miarę swoich możliwości.

Program preferuje model, w którym szkoła jest miejscem uczenia się, a nie miejscem nauczania przez nauczyciela, a praca nauczyciela ma charakter tutorski i ogranicza się do wspierania uczniów, zachęcania ich do stawiania hipotez, sprawdzania ich i formułowania obiektywnych wniosków. Uczący się będą mieli możliwość korzystania z potrzebnych wzorów, tablic, kalkulatorów, również z komputerów. Ten sposób pozwoli wykształcić u uczniów nawyk samodzielnego poszukiwania istotnych dla rozwiązania problemu informacji, ale nie zamyka im jednak drogi do korzystania z algorytmów (np. przy obliczaniu pierwiastków równania kwadratowego).

Uczniowie mniej zainteresowani matematyką często nie widzą potrzeby zgłębiania danych zagadnień. Dlatego warto rozpoczynać zajęcia od krótkiego wstępu, który pobudzi ciekawość uczących się i zmotywuje ich do dalszej pracy. Może to być zadanie pokazujące typowe albo zaskakujące wykorzystanie matematyki w realnej sytuacji lub w innych dziedzinach wiedzy bądź krótka prezentacja przygotowana przez uczniów, wprowadzająca w nową tematykę.

W pracy nauczyciela powinny dominować metody synektyczne, umożliwiające wytwarzanie przez uczących się pomysłów rozwiązań problemów i metod ich weryfikacji. Organizując proces uczenia się, warto pamiętać o metodzie WebQuest w procesie pobierania informacji z internetu.

Układ kształcenia wielostronnego zakłada sytuacje dydaktyczne pozwalające na osiąganie pożądanych celów, oparte na odpowiednich technikach dydaktycznych, sposobach uczenia się i metodach kształtowania postaw. Wśród nich dominująca powinna być problemowa strategia uczenia się, pozwalająca na modelowanie twórczych procesów myślowych. Uczący się poszukuje rozwiązań na drodze odkrywczej, formułuje uogólnienia teoretyczne badanych zależności. Można mu stawiać problemy otwarte, w których brak jest informacji o możliwych rozwiązaniach, i problemy zamknięte, w których są podane możliwe rozwiązania. Metody problemowe wymuszają dostrzeganie związków przyczynowo-skutkowych oraz wzajemnych oddziaływań między rozpatrywanymi elementami, a co za tym idzie – generują wytwarzanie pomysłów i ich weryfikację. Z kolei zadania wymagające szczegółowego zaplanowania działań umożliwiających rozwiązanie mogą być realizowane na drodze optymalnych decyzji. W weryfikacji hipotez ważne jest przekształcenie idei w schemat, sprawdzenie schematu, wprowadzenie poprawek, określenie wyniku i sprawdzenie jego wiarygodności.

Odpowiednie oddziaływania nauczyciela powodują emocjonalne zaangażowanie uczącego się i pobudzają sądy analityczno-opisowe, wyjaśniające, wartościujące i normatywne, zmieniające się w procesy transformacyjne, powodujące samodzielne posługiwanie się wiedzą opisowo-wyjaśniającą. Podstawowe bodźce do uczenia się to ciekawość i dążność do uzyskania kompetencji. Zachęcamy więc do uczenia się przez przeżywanie i działanie, co skutkuje umiejętnością stosowania wiedzy w nowych sytuacjach praktycznych i w efekcie – wytwarzaniem nowej wiedzy. Dobrymi formami pracy są tu gry dydaktyczne czy puzzle informacyjne.

Ważne jest też przyzwyczajanie ucznia do rozwiązywania nie tylko zadań deterministycznych, dla których jest pewność uzyskania jednoznacznego wyniku, lecz także zadań niemających jednoznacznego rozwiązania. Takie typy zadań można przyporządkować do sytuacji nieproblemowych, gdzie rozwiązanie ma charakter reproduktywny, i problemowych, wymagających wytwarzania nowych pomysłów. W obu wypadkach sugerujemy uczniowi wykorzystanie metod heurystycznych, umożliwiających stosowanie nie tylko zasad, prawidłowości i reguł znanego postępowania, ale również wykorzystanie intuicji i analogii. W czasie takich zajęć można pracować metodą drzewa decyzyjnego, map mentalnych czy dywanika pomysłów.

Po zdiagnozowaniu potrzeb i możliwości uczniów trzeba tak zaplanować pracę, aby umożliwić każdemu z uczących się osiągnięcie sukcesu edukacyjnego, dostosowując wymagania edukacyjne do jego możliwości. Preferowane są więc takie strategie dydaktyczne, które zachęcą do wytwarzania i weryfikowania pomysłów przy użyciu metod algorytmicznych i heurystycznych. Proponujmy uczącym się ćwiczenia kształtujące umiejętności korzystania z zasobów bibliotecznych (np. prac popularnonaukowych, naukowych, słowników, encyklopedii) oraz internetu (w tym odczytywania i interpretowania informacji z tabel, wykresów, diagramów), konstruowane tak, aby wymusić selekcjonowanie, syntetyzowanie wiadomości w celu wyciągania wniosków i formułowania uogólnień. Tu dobrą metodą do wykorzystania jest też praca z tekstem.

Uczniom mniej zainteresowanym matematyką można zaproponować metody algorytmiczne rozwiązywania typowych problemów, umożliwiające stopniowe utrwalanie wiedzy. Pokazujmy im konkretne przykłady zastosowań teoretycznych w praktyce, zwracając uwagę na możliwości opisu językiem symboli matematycznych zagadnień z życia codziennego. Wskazujmy na sprawność wykonywania obliczeń (również z użyciem kalkulatora i komputera). Zachęcajmy do pracy w grupach metodą projektów. Preferujmy aktywizujące metody kształcenia dające uczniom możliwość ujawnienia ich zainteresowań i zdolności. Bazujmy na wykorzystaniu i interpretowaniu reprezentacji, tworzeniu schematów, by dopiero po pewnym czasie przejść do budowania odpowiednich strategii.

U uczniów szczególnie zainteresowanych matematyką warto położyć nacisk na rozwój matematycznego myślenia, rozwijanie umiejętności wyboru najkorzystniejszej strategii działania i prowadzenie rozumowań. Zachęcajmy ich do samodzielnego zdobywania wiedzy, korzystania z dostępnej literatury, internetu. Wskazujmy na ciekawe zagadnienia teoretyczne, których rozwiązanie wymaga logicznego i krytycznego myślenia. Proponujmy udział w konkursach i olimpiadach. W wypadku takich uczniów dużą uwagę należy zwrócić na ułożenie indywidualnego programu kształcenia uwzględniającego zainteresowania i preferencje uczącego się.

Szczególną opieką trzeba otoczyć osoby niepełnosprawne żyjące w trudnych warunkach rodzinnych, mające z różnych przyczyn braki w wiedzy i umiejętnościach. Dla uczniów, którzy na przykład z przyczyn zdrowotnych większość czasu poświęconego na naukę spędzają w domu, warto opracować taki plan indywidualnego kształcenia, który zakłada samodzielną pracę z podręcznikiem, wykorzystywanie kart pracy, korzystanie z internetu. Prezentowany program sprzyja również uczniom mającym braki edukacyjne, gdyż zakłada powtórzenie i utrwalenie umiejętności z poprzednich etapów kształcenia.

Aby wdrożyć do praktyki szkolnej model kształcenia wielostronnego, warto wykorzystać metody stymulujące aktywność twórczą ucznia w czasie kształcenia formalnego i pozaformalnego. Metody te generują zarówno wytwarzanie pomysłów, jak konieczność ich weryfikacji. Należy również przyzwyczajać ucznia do różnicowania nowych wiadomości, hierarchizowania ich według przydatności, ogólności, szczegółowości i włączania do posiadanych zasobów.

Preferowane metody pracy:

* JIGSAW (puzzle, układanka),
* World Cafe (stoliki kawiarniane),
* Flipped Classroom (odwrócona klasa),
* mapa myśli (Mind Mapping),
* projekt edukacyjny,
* WebQuest,
* metoda stacji zadaniowych,
* metoda grup eksperckich,
* śnieżna kula.

Aby umożliwić uczniom rozwijanie zainteresowań matematycznych, warto też proponować im udział w konkursach, kołach zainteresowań, seminariach i sesjach organizowanych przez wyższe uczelnie.

IV. Ramowy rozkład materiału

|  |  |
| --- | --- |
| **Klasa I (3 godziny w tygodniu)**  **80 + 12 = 92 godziny**  **13 h do dyspozycji nauczyciela** | |
| Dział | Liczba godzin |
| Liczby rzeczywiste | 15 |
| Potęgi, pierwiastki i logarytmy | 15 |
| Funkcje | 15 |
| Funkcja liniowa | 10 |
| Równania, nierówności, układy równań | 15 |
| Zastosowania wybranych funkcji | 10 |
| Praca sprawdzająca i jej omówienie | 6 x 2 = 12 |
| **Klasa II (4 godziny w tygodniu)**  **104 + 12 = 116 godzin**  **24 godziny do dyspozycji nauczyciela** | |
| Dział | Liczba godzin |
| Wyrażenia algebraiczne | 18 |
| Przekształcenia wykresów funkcji | 8 |
| Funkcja kwadratowa | 22 |
| Elementy geometrii płaszczyzny | 20 |
| Funkcje trygonometryczne | 18 |
| Ciągi | 18 |
| Praca sprawdzająca i jej omówienie | 6 x 2 = 12 |
| **Klasa III (3 godziny w tygodniu)**  **81 + 12 = 93 godzin**  **12 godzin do dyspozycji nauczyciela** | |
| Dział | Liczba godzin |
| Wielomiany | 12 |
| Przekształcenia geometryczne płaszczyzny | 12 |
| Funkcje wymierne | 12 |
| Wielokąty | 15 |
| Geometria analityczna | 15 |
| Funkcje potęgowe, wykładnicze i logarytmiczne | 15 |
| Praca sprawdzająca i jej omówienie | 6 x 2 = 12 |
| **Klasa IV (4 godziny w tygodniu)**  **70 + 8 = 78 godzin**  **18 godzin do dyspozycji nauczyciela** | |
| Dział | Liczba godzin |
| Stereometria | 20 |
| Kombinatoryka | 8 |
| Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka | 18 |
| Powtórzenie przed maturą | 24 |
| Praca sprawdzająca i jej omówienie | 4 x 2 = 8 |

V. Treści edukacyjne

|  |  |
| --- | --- |
| **Klasa I** | |
| **Liczby rzeczywiste** | |
| Hasła programowe | Wymagania szczegółowe  Uczniowie: |
| Zbiory | podają przykłady zbiorów, podzbiorów, zbiorów równych  posługują się symboliką matematyczną dotyczącą zbiorów  znajdują sumę, różnicę, iloczyn zbiorów |
| Liczby wymierne | rozpoznają, podają przykłady liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, klasyfikują liczby wymierne  określają dzielniki danej liczby, znajdują NWW i NWD liczb naturalnych  przeprowadzają proste dowody matematyczne związane z liczbami pierwszymi  zapisują liczby wymierne w różnych postaciach  porównują, porządkują liczby wymierne  wykonują działania w zbiorze liczb wymiernych |
| Liczby niewymierne | rozpoznają liczby niewymierne i podają przykłady takich liczb  udowadniają niewymierność niektórych liczb  stosują liczby niewymierne w obliczeniach praktycznych |
| Działania na liczbach rzeczywistych | klasyfikują liczby rzeczywiste  wykonują działania w zbiorze R  porównują i porządkują liczby rzeczywiste  zaznaczają liczby rzeczywiste na osi liczbowej  podają wartości przybliżone liczb rzeczywistych  zaokrąglają i szacują wyniki działań |
| Procenty i promile | wykonują obliczenia procentowe  posługują się pojęciem: punkt procentowy  wykonują obliczenia, wykorzystując promile  wykorzystują procenty i promile w sytuacjach praktycznych |
| Przedziały liczbowe | rozpoznają i podają przykłady przedziałów liczbowych  zapisują niektóre zbiory liczbowe w postaci przedziałów liczbowych ograniczonych / nieograniczonych  interpretują algebraicznie i graficznie przedziały liczbowe  wykonują działania na przedziałach liczbowych |
| Wartość bezwzględna | posługują się arytmetycznym określeniem wartości bezwzględnej i jej interpretacją geometryczną  wykonują obliczenia z wartością bezwzględną  wykorzystują własności wartości bezwzględnej, na przykład rozwiązując elementarne równania i nierówności z wartością bezwzględną  obliczają błąd względny i bezwzględny przybliżenia |
| **2. Potęgi, pierwiastki i logarytmy** | |
| Hasła programowe | Wymagania szczegółowe  Uczniowie: |
| Potęga o wykładniku całkowitym | wykonują obliczenia z wykorzystaniem potęg o wykładniku naturalnym i całkowitym ujemnym, również w kontekstach realistycznych  zapisują liczby w notacji wykładniczej  stosują prawa działań na potęgach w obliczeniach  porównują potęgi o wykładnikach całkowitych |
| Pierwiastki | obliczają wartości dokładne i przybliżone pierwiastków  wykorzystują w obliczeniach prawa działań na pierwiastkach  włączają czynnik pod znak pierwiastka  wyłączają czynnik przed znak pierwiastka  przekształcają wyrażenia zawierające pierwiastki |
| Potęga o wykładniku wymiernym | obliczają wartości potęg o wykładnikach wymiernych z wykorzystaniem odpowiednich praw działań  porównują potęgi o wykładnikach wymiernych  wykorzystują potęgi o wykładnikach wymiernych do zapisu problemów z kontekstem realistycznym |
| Logarytm | obliczają logarytmy, w tym logarytmy dziesiętne, korzystając z definicji  obliczają dokładne i przybliżone wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających logarytmy  stosują w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym  obliczają oprocentowanie lokat z wykorzystaniem procentu składanego  wykorzystuje logarytmy w obliczeniach z innych dziedzin wiedzy (np. geografii, biologii) i w kontekście realistycznym |
| **Funkcje** | |
| Hasła programowe | Wymagania szczegółowe  Uczniowie: |
| Pojęcie funkcji. Sposoby opisywania funkcji | podają przykłady przyporządkowań, które są (lub nie) funkcjami  opisują funkcję różnymi sposobami |
| Dziedzina i zbiór wartości funkcji liczbowej | odczytują z wykresu dziedzinę i zbiór wartości funkcji  określają dziedzinę i zbiór wartości funkcji, które są opisane różnymi sposobami  określają dziedzinę funkcji opisującej zdarzenia lub zjawiska z otaczającej rzeczywistości  określają najmniejszą / największą wartość funkcji liczbowej |
| Własności funkcji | określają i wyznaczają miejsca zerowe funkcji opisanej różnymi sposobami  określają znak funkcji w przedziale  odczytują z wykresu przedziały monotoniczności funkcji  określają monotoniczność funkcji opisanej różnymi sposobami |
| Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu | rozpoznają i szkicują wykresy wybranych funkcji  graficznie rozwiązują równania i nierówności  odczytują własności funkcji na podstawie jej wykresu  korzystając z wykresu funkcji, prezentują informacje dotyczące zjawisk z otaczającej rzeczywistości |
| **Funkcja liniowa** | |
| Hasła programowe | Wymagania szczegółowe  Uczniowie: |
| Pojęcie funkcji liniowej | rozpoznają funkcję liniową opisaną różnymi sposobami  podają przykłady funkcji liniowych i sporządzają ich wykresy  interpretują algebraicznie i geometrycznie współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej  wyznaczają nachylenie prostej, będącej wykresem funkcji liniowej  określają monotoniczność funkcji liniowej w zależności od jej współczynnika kierunkowego |
| Miejsce zerowe funkcji liniowej. Znak funkcji liniowej | określają liczbę miejsc zerowych funkcji w zależności od jej współczynników  określają znak funkcji liniowej |
| Równoległość oraz prostopadłość wykresów funkcji liniowych | rozpoznają na podstawie wykresu i wzoru wzajemne położenie wykresów funkcji (w tym równoległość i prostopadłość)  znajdują wzory funkcji, których wykresy są prostymi równoległymi / prostopadłymi |
| Wyznaczanie wzoru funkcji liniowej | wyznaczają wzór funkcji liniowej na podstawie jej wykresu lub własności |
| Zastosowania funkcji liniowej | wykorzystują własności funkcji liniowej do interpretacji zagadnień z różnych dziedzin wiedzy, także osadzonych w kontekście praktycznym |
| **Równania, nierówności, układy równań** | |
| Hasła programowe | Wymagania szczegółowe  Uczniowie: |
|  |  |
| Równanie liniowe / nierówność liniowa z jedną niewiadomą | rozpoznają równania / nierówności liniowe z jedną niewiadomą, podają przykłady takich równań / nierówności  określają rodzaj równania liniowego / nierówności liniowej  rozwiązują równania liniowe z jedną niewiadomą metodą równań równoważnych  rozwiązują nierówności liniowe z jedną niewiadomą metodą nierówności równoważnych, interpretują zbiór rozwiązań na osi liczbowej  rozwiązują zadania tekstowe prowadzące do ułożenia i rozwiązania równania / nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą |
| Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi | rozpoznają i podają przykłady układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi  rozwiązują układy równań metodą podstawiania, przeciwnych współczynników i graficznie  określają rodzaj danego układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi, również korzystając z ich interpretacji graficznej  stosują układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych również z kontekstem realistycznym |
| **Zastosowania wybranych funkcji** | |
| Hasła programowe | Wymagania szczegółowe  Uczniowie : |
| Wielkości wprost proporcjonalne | przekształcają wyrażenia, korzystając z własności proporcji  wykorzystują własności wielkości wprost proporcjonalnych w zadaniach praktycznych |
| Proporcjonalność prosta / odwrotna | wykorzystują własności proporcjonalności prostej / odwrotnej, rozwiązując zadania praktyczne |
| Wielkości odwrotnie proporcjonalne | przekształcają wyrażenia, korzystając z własności wielkości odwrotnie proporcjonalnych  wykorzystują własności wielkości odwrotnie proporcjonalnych również w zadaniach praktycznych |
| Zastosowanie funkcji kwadratowej | wykorzystują własności funkcji kwadratowej, rozwiązując również zadania praktyczne |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Klasa II** | | |
| **Wyrażania algebraiczne** | | |
| Hasła programowe | Wymagania szczegółowe  Uczniowie: | |
| Wzory skróconego mnożenia | stosują wzory skróconego mnożenia 2 stopnia  stosują wzory skróconego mnożenia 3 stopnia  stosują wzór | |
| Przekształcanie wyrażeń algebraicznych | odczytują i zapisują wyrażenia algebraiczne  dodają, odejmują, mnożą sumy algebraiczne  wyłączają poza nawias jednomian z sumy algebraicznej  rozkładają sumę algebraiczną na czynniki różnymi metodami | |
| Dowodzenie twierdzeń | wykorzystują wyrażenia algebraiczne do uzasadniania twierdzeń | |
| Równania i nierówności z wartością bezwzględną | rozwiązują proste równania z wartością bezwzględną  rozwiązują proste nierówności z wartością bezwzględną i stosują ich interpretację geometryczną | |
| **Przekształcenia wykresów funkcji** | | |
| Hasła programowe | | Wymagania szczegółowe  Uczniowie: |
| Przesunięcie wykresu funkcji wzdłuż osi układu współrzędnych | | szkicują wykres funkcji w przesunięciu wzdłuż osi X  szkicują wykres funkcji w przesunięciu wzdłuż osi Y  na podstawie wzoru funkcji  określają wzór funkcji  na podstawie wzoru funkcji  określają wzór funkcji |
| Symetria wykresów funkcji względem osi układu współrzędnych | | szkicują wykres funkcji w symetrii względem osi X  szkicują wykres funkcji w symetrii względem osi Y  określają na podstawie wzoru funkcji  wzór funkcji  określają na podstawie wzoru funkcji  wzór funkcji |
| Zastosowania przekształceń wykresów funkcji | | wykorzystują przekształcenia wykresów funkcji w zadaniach matematycznych i praktycznych |
| **Funkcja kwadratowa** | | |
| Hasła programowe | | Wymagania szczegółowe  Uczniowie: |
| Postać ogólna, kanoniczna i iloczynowa trójmianu kwadratowego | | zapisują trójmian kwadratowy w postaci uporządkowanej  rozpoznają funkcję kwadratową opisaną różnymi sposobami, podają przykłady takich funkcji  opisują funkcję kwadratową różnymi sposobami  interpretują współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej zapisanym w różnej postaci  zapisują wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (o ile istnieje) |
| Wykres funkcji kwadratowej | | szkicują wykres funkcji kwadratowej opisanej w różny sposób, w tym wzorem  szkicują, korzystając z wykresu funkcji kwadratowej , wykresy funkcji , ,  przekształcają wykres funkcji kwadratowej (w symetrii względem osi układu współrzędnych, przesuwając go wzdłuż osi układu współrzędnych) |
| Własności funkcji kwadratowej | | odczytują własności funkcji kwadratowej, również na podstawie jej wykresu  wyznaczają wzór funkcji kwadratowej, korzystając z jej wykresu lub własności  wyznaczają najmniejszą / największą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym |
| Zastosowanie funkcji kwadratowej | | wykorzystują własności funkcji kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych, także osadzonych w kontekście praktycznym (w tym zadań optymalizacyjnych) |
| Równania kwadratowe | | sprowadzają równanie kwadratowe do postaci ogólnej  obliczają wyróżnik równania kwadratowego i na jego podstawie określają liczbę rozwiązań równania  określają rozwiązania równania kwadratowego zapisanego w postaci iloczynowej  zapisują równanie kwadratowe w postaci iloczynowej (jeżeli jest to możliwe)  rozwiązują równanie kwadratowe niezupełne, bez obliczania wyróżnika  rozwiązują równanie kwadratowe, korzystając z odpowiednich wzorów  wyprowadzają wzory na pierwiastki równania kwadratowego  rozwiązują zadania tekstowe (również wymagające utworzenia odpowiedniego modelu matematycznego) prowadzące do rozwiązania równania kwadratowego |
| Nierówności kwadratowe | | rozwiązują nierówność kwadratową  interpretują geometrycznie zbiór rozwiązań nierówności kwadratowej  rozwiązują zadania prowadzące do nierówności kwadratowych |
| Układ równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe | | rozwiązują metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe |
| **Elementy geometrii płaszczyzny** | | |
| Hasła programowe | | Wymagania szczegółowe  Uczniowie: |
| Wprowadzenie do geometrii | | poznają geometryczne pojęcia pierwotne i najważniejsze aksjomaty  przypominają podstawowe figury geometryczne i ich własności |
| Okrąg i koło | | podają własności koła i okręgu, wyznaczają ich elementy (promienie, średnice)  określają wzajemne położenie prostej i okręgu oraz wzajemne położenie dwóch okręgów i stosują ich własności  korzystają z własności okręgów stycznych  obliczają pole koła i długość okręgu  obliczają pole wycinka koła i długość łuku okręgu |
| Kąty w okręgu | | stosują własności kątów środkowych i wpisanych |
| Trójkąty i ich rodzaje | | rozpoznają trójkąty ostrokątne, prostokątne, rozwartokątne, stosują własności tych trójkątów  klasyfikują trójkąty ze względu na długości boków, wykorzystują własności tych trójkątów |
| Związki miarowe w trójkącie | | stosują twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne  stosują zależności między bokami i kątami w trójkątach  stosują zależności między odcinkami w trójkącie (np. między wysokościami, dwusiecznymi, środkowymi oraz symetralnymi boków)  wskazują podstawowe punkty szczególne w trójkątach (np. środek ciężkości), korzystają z ich własności  stosują w zadaniach geometrycznych własności odcinka łączącego środki ramion trójkąta |
| Okrąg opisany na trójkącie, okrąg wpisany w trójkąt | | stosują własności dwusiecznej kąta w trójkącie  stosują własności symetralnych boków trójkąta  stosują twierdzenie o odcinkach stycznych  stosują w zadaniach geometrycznych własności okręgu opisanego na trójkącie i wpisanego w trójkąt (w tym w trójkąt prostokątny oraz równoboczny)  obliczają pole (obwód) koła wpisanego w trójkąt oraz opisanego na trójkącie |
| **Funkcje trygonometryczne** | | |
| Hasła programowe | | Wymagania szczegółowe  Uczniowie: |
| Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym | | obliczają sinus, cosinus i tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym  szkicują kąt ostry, gdy znany jest jego sinus, cosinus lub tangens  obliczają wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach 300, 600, 450  wykorzystują długości odcinków w trójkątach z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych kątów 300, 600, 450  wyznaczają przybliżoną wartość funkcji trygonometrycznej, korzystając z tablic lub kalkulatora  stosują funkcje trygonometryczne w sytuacjach praktycznych i geometrycznych |
| Funkcje trygonometryczne kątów o miarach  od 900 do 1800 | | obliczają wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów rozwartych  określają znaki funkcji trygonometrycznych dla kątów od 00 do 1800  wykorzystują wartości funkcji trygonometrycznych kątów rozwartych do obliczania długości odcinków w wielokątach |
| Związki między funkcjami trygonometrycznymi | | stosują proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ( ,  )  wyznaczają, znając wartość jednej z funkcji trygonometrycznych, wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego samego kąta  wykorzystują wzory redukcyjne dla kąta |
| Zastosowanie funkcji trygonometrycznych | | wykorzystują własności i wartości funkcji trygonometrycznych w zadaniach geometrycznych, w zadaniach z innych dziedzin wiedzy i w zadaniach praktycznych |
| **Ciągi** | | |
| Hasła programowe | | Wymagania szczegółowe  Uczniowie: |
| Pojęcie ciągu. Sposoby określania ciągów | | rozpoznają ciągi i podają przykłady ciągów  opisują ciągi różnymi sposobami  podają własności ciągu liczbowego (w tym monotoniczność) na podstawie jego wykresu lub wzoru  wyznaczają kilka wyrazów ciągu danego wzorem ogólnym lub w sposób rekurencyjny  zapisują wzór ogólny ciągu opisanego w różny sposób  wykorzystują własności sumy *n*-początkowych wyrazów ciągu |
| Ciąg arytmetyczny i jego własności | | rozpoznają ciąg arytmetyczny i podają przykłady takich ciągów  badają, czy dany ciąg jest arytmetyczny  badają monotoniczność ciągu  arytmetycznego  wyznaczają pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego i jego różnicę, mając dane na przykład dwa wyrazy ciągu  zapisują wzór na *n*-ty wyraz ciągu, mając określone dane na przykład jego różnicę i pierwszy wyraz  stosują wzór na sumę *n* *początkowych* wyrazów ciągu arytmetycznego  rozwiązują zadania z wykorzystaniem własności ciągu arytmetycznego, wymagające również tworzenia modeli matematycznych |
| Ciąg geometryczny i jego własności | | rozpoznają ciąg geometryczny i podają przykłady takich ciągów  badają, czy dany ciąg jest geometryczny  badają monotoniczność ciągu  geometrycznego  wyznaczają pierwszy wyraz ciągu geometrycznego i jego iloraz, mając dane na przykład dwa wyrazy ciągu  zapisują wzór na *n*-ty wyraz ciągu, mając określone dane na przykład jego iloraz i pierwszy wyraz  stosują wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego  rozwiązują zadania z wykorzystaniem własności ciągu geometrycznego, wymagające również tworzenia modeli matematycznych |
| Oprocentowanie lokat i kredytów | | obliczają zyski z lokat złożonych na procent prosty  obliczają zyski z lokat złożonych na procent składany zysków z lokat i kosztów kredytów |

|  |  |
| --- | --- |
| **Klasa III** | |
| |  | | --- | | **Wielomiany** | | |
| Hasła programowe | Wymagania szczegółowe  Uczniowie : |
| Wielomiany, działania na wielomianach | rozpoznają wielomiany, porządkują wielomiany, określają ich stopnie  wykonują działania na wielomianach (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie przez dwumian)  rozkładają wielomian na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów |
| Pierwiastki wielomianu | znajdują pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych |
| Równania wielomianowe | rozwiązują proste równania wielomianowe, które można doprowadzić do postaci iloczynowej |
| Zastosowanie wielomianów | stosują wielomiany do rozwiązywania zadań, również praktycznych |
|  |  |
| |  | | --- | | **Przekształcenia geometryczne płaszczyzny** | | |
| Hasła programowe | Wymagania szczegółowe  Uczniowie: |
| Przystawanie figur | poznają własności i przykłady figur przystających  rozpoznają i otrzymują figury przystające |
| Symetria | otrzymują obrazy figur w symetrii osiowej i środkowej, korzystają z własności tych figur |
| Przystawanie trójkątów | poznają cechy przystawania trójkątów  sprawdzają, czy trójkąty są przystające, wykorzystując cechy przystawania trójkątów  rozpoznają trójkąty przystające  obliczają pola, obwody oraz długości odcinków trójkątów przystających |
| Cechy podobieństwa trójkątów | poznają cechy podobieństwa trójkątów  sprawdzają, czy trójkąty są podobne  obliczają długości odcinków i miary kątów w trójkątach podobnych  obliczają pola i obwody trójkątów podobnych  stosują podobieństwo trójkątów do dowodzenia twierdzeń |
| Twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa | poznają twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne  stosują twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne |
| |  | | --- | | **3. Funkcje wymierne** | | |
| Hasła programowe | Wymagania szczegółowe  Uczniowie: |
| Wyrażenia wymierne, działania na wyrażeniach wymiernych | rozpoznają wyrażenia wymierne, podają przykłady takich wyrażeń  przekształcają wyrażenia wymierne (dodają, odejmują, mnożą) |
| Równania wymierne | określają dziedzinę równania wymiernego  stosują własności proporcji do przekształcenia równania wymiernego  rozwiązują proste równanie wymierne prowadzące do równania liniowego  rozwiązują proste równanie wymierne prowadzące do równania kwadratowego  rozwiązują równania wymierne, gdzie w liczniku i mianowniku wielomiany są zapisane w postaci iloczynowej  stosują równania wymierne do rozwiązywania zadań |
| Funkcja | rozpoznają funkcję , określają jej własności, sporządzają i przekształcają wykres  wykorzystują funkcję  , również w zastosowaniach praktycznych |
| |  | | --- | | **4. Wielokąty** | | |
| Hasła programowe | Wymagania szczegółowe  Uczniowie: |
| Czworokąty i ich własności | przypominają klasyfikację czworokątów i ich podstawowe własności  stosują własności czworokątów w zadaniach |
| Wielokąty foremne | rozpoznają wielokąty foremne i korzystają z ich własności |
| Twierdzenie sinusów | poznają i stosują twierdzenie sinusów |
| Twierdzenie cosinusów | poznają i stosują twierdzenie cosinusów |
| Zastosowanie funkcji trygonometrycznych | stosują funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz do obliczania pól figur |
| |  | | --- | | **5. Geometria analityczna** | | |
| Hasła programowe | Wymagania szczegółowe  Uczniowie: |
| Odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej | obliczają odległość punktów o danych współrzędnych  obliczają długość odcinka, mając dane współrzędne jego końców  wyprowadzają wzór na odległość punktów w układzie współrzędnych, korzystając z twierdzenia Pitagorasa  wyznaczają współrzędne środka odcinka, mając dane współrzędne jego końców  obliczają odległość punktu od prostej  wyznaczają współrzędne jednego z końców odcinka, mając dane współrzędne środka i drugiego końca |
| Prosta w układzie współrzędnych | zapisują równanie prostej w postaci kierunkowej oraz w postaci ogólnej  rysują prostą, znając jej równanie ogólne  zapisują w postaci ogólnej równanie prostej o danych własnościach (np. przechodzącej przez dwa różne punkty) |
| Wzajemne położenie prostych w układzie współrzędnych | określają wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie z układem współrzędnych, również na podstawie ich równań  znajdują punkt wspólny prostych (jeżeli istnieje)  stosują równoległość i prostopadłość prostych w zadaniach |
| Równanie okręgu | posługują się równaniem okręgu, określają środek i promień okręgu |
| Prosta i okrąg w układzie współrzędnych | określają wzajemne położenie prostej i okręgu w układzie współrzędnych  znajdują punkty wspólne prostej i okręgu (jeżeli istnieją) |
| Prosta i parabola w układzie współrzędnych | określają wzajemne położenie prostej i paraboli w układzie współrzędnych  znajdują punkty wspólne prostej i paraboli (jeżeli istnieją) |
| Symetria w układzie współrzędnych | wyznaczają obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych  wyznaczają obrazy okręgów i wielokątów w symetrii środkowej o środku w początku układu współrzędnych |
| |  | | --- | | **Funkcje potęgowe, wykładnicze i logarytmiczne** | | |
| Hasła programowe | Wymagania szczegółowe  Uczniowie: |
| Potęga o wykładniku rzeczywistym | podają poznane wiadomości o potęgach  wykorzystują własności potęg o wykładnikach rzeczywistych |
| Funkcja potęgowa | szkicują wykresy funkcji potęgowych, określają ich własności  stosują funkcje potęgowe w zadaniach |
| Funkcja wykładnicza | szkicują wykres funkcji wykładniczej  omawiają na podstawie wykresu podstawowe własności funkcji wykładniczej  rozwiązują zadanie wymagające wykorzystania funkcji wykładniczej do opisu zjawisk fizycznych lub chemicznych  rozwiązują zadania wymagające wykorzystania funkcji wykładniczej w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym |
| Funkcja logarytmiczna | podają poznane wiadomości o logarytmach  szkicują wykresy funkcji logarytmicznych, przekształcają je  określają własności funkcji logarytmicznych  posługują się funkcją logarytmiczną i jej wykresem do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi |

|  |  |
| --- | --- |
| **Klasa IV** | |
| **Stereometria** | |
| Hasła programowe | Wymagania szczegółowe  Uczniowie: |
| Położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni | rozpoznają wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się  określają wzajemne położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni  posługują się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną  rozpoznają i wykorzystują pojęcie kąta dwuściennego między półpłaszczyznami |
| Graniastosłupy | rozpoznają, rysują i wskazują elementy graniastosłupów, w tym prostych i prawidłowych  wskazują kąty między odcinkami w graniastosłupach, zaznaczają je na rysunkach, wykorzystują w zadaniach  wskazują kąty między odcinkami i płaszczyznami w graniastosłupach (np. kąt między przekątną graniastosłupa i płaszczyzną podstawy), zaznaczają je na rysunkach i wykorzystują w zadaniach  wskazują kąty między ścianami w graniastosłupach, zaznaczają je na rysunkach i wykorzystują w zadaniach  określają, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną, wykorzystują przekroje w zadaniach  obliczają i wykorzystują miary kątów oraz długości odcinków w graniastosłupach, również z zastosowaniem trygonometrii  obliczają pole powierzchni i objętość graniastosłupa, również z wykorzystaniem trygonometrii  wykorzystują zależności między objętościami graniastosłupów podobnych |
| Ostrosłupy | rozpoznają, rysują i wskazują elementy ostrosłupów, w tym prawidłowych  wskazują kąty między odcinkami w ostrosłupach, zaznaczają je na rysunkach, wykorzystują w zadaniach  wskazują kąty między odcinkami i płaszczyznami w ostrosłupach, zaznaczają je na rysunkach i wykorzystują w zadaniach  wskazują kąty między ścianami w ostrosłupach, zaznaczają je na rysunkach i wykorzystują w zadaniach  obliczają i wykorzystują miary kątów oraz długości odcinków w ostrosłupach, również z zastosowaniem trygonometrii  obliczają pole powierzchni i objętość ostrosłupa, również z wykorzystaniem trygonometrii  wykorzystują zależności między objętościami ostrosłupów podobnych |
| Walce | rozpoznają kąty między odcinkami oraz kąty między odcinkami i płaszczyznami w walcach, wyznaczają miary tych kątów  posługują się przekrojem poprzecznym i przekrojem płaszczyzną równoległą do podstawy walca  obliczają pola powierzchni i objętości walców, również z wykorzystaniem trygonometrii  wykorzystują własności walców podobnych |
| Stożki | rozpoznają w stożkach kąty między odcinkami oraz kąty między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą)  wykorzystują przekroje stożka w zadaniach  obliczają miary kątów w stożkach, również z wykorzystaniem trygonometrii  obliczają pola powierzchni i objętości stożków, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń  wykorzystują zależności między objętościami stożków podobnych |
| Kule | wyznaczają elementy kuli  wykorzystują przekroje kuli (w tym koło wielkie)  obliczają pole powierzchni i objętości kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń |
| **Kombinatoryka** | |
| Hasła programowe | Wymagania szczegółowe  Uczniowie: |
| Podstawowe pojęcia kombinatoryczne | posługują się podstawowymi pojęciami kombinatorycznymi |
| Zliczanie obiektów w sytuacjach kombinatorycznych | zliczają obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych niewymagających używania wzorów kombinatorycznych  zliczają obiekty, stosując reguły dodawania i mnożenia |
| Zastosowanie reguł kombinatorycznych | rozwiązują proste zadania kombinatoryczne również za pomocą drzewa |
| **Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka** | |
| Hasła programowe | Wymagania szczegółowe  Uczniowie: |
| Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa | posługują się pojęciami takimi, jak: doświadczenie losowe, zdarzenie elementarne, zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego, zdarzenie, zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe |
| Działania na zdarzeniach elementarnych | określają zbiór zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego, określają jego moc oraz określają zdarzenia elementarne sprzyjające danemu zdarzeniu  określają zdarzenia pewne, niemożliwe  znajdują sumę zdarzeń, różnicę zdarzeń, iloczyn zdarzeń oraz zdarzenie przeciwne do danego zdarzenia |
| Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń | obliczają prawdopodobieństwo zdarzenia, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa  obliczają prawdopodobieństwo doświadczenia kilkuetapowego, wykorzystując drzewo stochastyczne  rozwiązują zadania osadzone w kontekście praktycznym wymagające obliczania prawdopodobieństwa |
| Podstawowe pojęcia statystyki | posługują się podstawowymi pojęciami statystycznymi  odczytują i interpretują dane statystyczne przedstawione w postaci tabel, wykresów, diagramów  przedstawiają dane empiryczne w różnych postaciach, analizują je, porównują |
| Średnia z próby | obliczają i interpretują średnią arytmetyczną zestawu danych  obliczają i interpretują średnią ważoną zestawu danych  znajdują medianę i dominantę |
| Skala centylowa | wykorzystują skalę centylową do interpretowania danych |
| Wariancja i odchylenie standardowe | obliczają wariancję zestawu danych i interpretują wynik  obliczają i interpretują odchylenie standardowe zestaw u danych |
| Wartość oczekiwana | obliczają wartość oczekiwaną i interpretują jako spodziewany wynik doświadczenia losowego również w zadaniach osadzonych w kontekście realistycznym |

VI. Zakładane osiągnięcia uczniów

Zmiany związane z rozwojem nowych technologii i globalizacją spowodowały, że zmieniły się oczekiwania uczniów w stosunku do osiągnięć edukacyjnych. Nie koncentrują się one już wokół szczegółowych zagadnień (które są wyodrębnione w „Wymaganiach szczegółowych”), ale wokół kompleksowych umiejętności, dzięki którym młody człowiek będzie mógł kontynuować edukację i radzić sobie w dorosłym życiu.

Wykładnia, na której bazuje program, wskazując oczekiwane osiągnięcia uczniów, to kompetencje kluczowe, zdefiniowane w Zaleceniach Parlamentu Europejskiego i Rady z dnia 22 maja 2018 r., cele kształcenia określone w podstawie programowej nauczania matematyki – zakres podstawowy oraz cele specyficzne dla danego programu (opisane w rozdziale „Szczegółowe cele kształcenia i wychowania”).

Zatem uczniowie, zgłębiający matematykę, dzięki realizacji przez nauczyciela niniejszego programu nauczania i wykorzystaniu obudowy dydaktycznej, będą potrafili:

* znaleźć potrzebne informacje, przeanalizować je, zinterpretować, wyciągnąć wnioski i je uzasadnić,
* używać języka matematycznego do tworzenia tekstów naukowych, ale również do opisu modeli matematycznych w otaczającej nas rzeczywistości,
* posługiwać się nowoczesnymi technologiami (w szczególności cyfrowymi) do wyszukiwania danych i ich prezentacji oraz do pogłębiania i rozwijania wiedzy i umiejętności ukształtowanych w procesie lekcyjnym (czyli kompetencji w zakresie uczenia się),
* współdziałać w grupie, wykazując się inicjatywą i przedsiębiorczością oraz umiejętnością posługiwania się językiem matematyki, tworząc na przykład projekty edukacyjne czy prace badawcze,
* stosować i tworzyć obiekty matematyczne, posługiwać się reprezentacjami, rozwiązując obowiązkowe i rozszerzone problemy matematyczne oraz te osadzone w kontekście realistycznym,
* dostrzegać regularności, podobieństwa i analogie (również na podstawie znanych faktów czy zjawisk z innych dziedzin wiedzy) oraz na ich podstawie formułować wnioski, uzasadniać je z wykorzystaniem nawet kilkuetapowych rozumowań,
* stosować i tworzyć strategie przy rozwiązywaniu typowych i nietypowych zagadnień matematycznych, także osadzonych w kontekście realistycznym.

VII. Propozycje kryteriów oceny i metod sprawdzania osiągnieć ucznia

Na początku procesu kształcenia w liceum ogólnokształcącym bądź technikum warto wspólnie z uczniami ustalić konkretne cele i umiejętności, które muszą być osiągane w danych okresach czasowych. Trzeba także uzgodnić, w jaki sposób będzie sprawdzany i zapisywany przyrost tych umiejętności.

Wymagania, odpowiadające poszczególnym stopniom szkolnym, powinny być zgodne ze szkolnym systemem oceniania, dostępne w ciągu całego roku szkolnego dla uczniów i ich rodziców. W ten sposób uczący się będzie mógł zaplanować swoją naukę. Będzie to stanowić również element dopingujący i motywujący. Nauczycielowi zaś pozwoli na bieżące kontrolowanie skuteczności stosowanych metod, opracowywanie sposobów pracy i dostosowanie ich do indywidualnych potrzeb uczących się oraz przygotowywanie ćwiczeń i zadań sprawdzających.

Ciągłość wiedzy opiera się na systematyczności wytwarzania logicznych połączeń między jej elementami. Ważne jest więc łączenie podstawowych pojęć matematycznych z możliwościami ich wykorzystania i włączania nowych wiadomości. W związku z tym przygotowywane sprawdziany powinny odpowiadać nie tylko na pytanie: „Co uczący się umie?”, ale też pozwolić na sformułowanie odpowiedzi na pytanie: „Jakie ma luki w wiadomościach?”. Zatem testy sprawdzające muszą być tak budowane, aby pokazać nie tylko zasób wiedzy ucznia, także sposób jej prezentowania i zastosowania. Przy czym zapamiętane wiadomości sprawdzamy tylko w zakresie niezbędnym dla trwałości dalszego kształcenia.

Budowanie sprawdzianów warto oprzeć na takich układach umiejętnościowych, które określą kolejno: poziom zapamiętanych wiadomości, stosowania wiedzy w sytuacjach typowych, umiejętność zaplanowania rozwiązania, wyboru strategii w sytuacji nietypowej, przeprowadzenie prostego rozumowania i uzasadnienia wyciąganych wniosków.

Takiej konstrukcji testów będzie odpowiadać towarzysząca im skala punktowa lub procentowa zamieniana następnie na stopnie szkolne. W najprostszych przypadkach nauczyciel określi listę zadań do rozwiązania, kryteria ich oceniania. Innym pomysłem jest takie skonstruowanie pytań, aby uczący się sam mógł wybrać sposób ich oceny. Trzeci poziom trudności może polegać na sformułowaniu problemu w takiej formie, aby uczeń był zmuszony wybrać najprostszą i najszybszą metodę rozwiązania. Przy takiej budowie sprawdzianów nie zawsze będzie ważny uzyskany wynik, ale ocenie będzie też podlegać droga dochodzenia do niego, kreatywność myślenia polegająca na dostosowywaniu metody do rozwiązania w miarę postępującej pracy. Warto, aby ocenie podlegała też umiejętność samodzielnego wyszukiwania informacji i ich przyswajania oraz samodzielność w kształtowaniu umiejętności opartych na samokształceniu.

Planując proces sprawdzania osiągnięć edukacyjnych młodego człowieka, należy mieć na względzie funkcje: diagnozującą, klasyfikacyjno-informacyjną i wychowawczą oceny. Funkcja diagnozująca jest związana z określeniem indywidualnych potrzeb i preferencji, obserwowaniem rozwoju ucznia, skutecznością stosowania metod, sposobów i form pracy nauczyciela. Funkcja klasyfikacyjno-informacyjna to porównywanie osiągnięć uczącego się z zaplanowanymi kryteriami (z uwzględnieniem również wymagań maturalnych), także pod kątem przyszłego wyboru kierunku studiów, oraz przekazanie informacji o postępach uczniowi lub jego rodzicom. Funkcja wychowawczo-motywująca ma na celu zachęcenie ucznia do dalszej pracy, utwierdzenie go w przekonaniu o własnej wartości, celowości i skuteczności podejmowanych działań.

Do dokumentowania postępów ucznia mogą służyć „Karty osiągnięć edukacyjnych ucznia”, na których odnotowywany będzie stopień opanowania poszczególnych umiejętności, podzielony na przykład na lata lub okresy półroczne. Karty takie może prowadzić zarówno nauczyciel, jak i uczeń i porównywać je z samodzielnie wystawioną oceną. Nauczyciel korzystający z tego programu będzie miał możliwość oceniania nie tylko przyrostu umiejętności czysto matematycznych, lecz także wynikających z zakładanych celów ogólnych. Ważne jest więc stosowanie różnych metod badawczych.

Można zatem oceniać:

* wypowiedzi ustne pozwalające na sprawdzenie umiejętności werbalnego komunikowania się z użyciem języka matematyki, a zarazem prezentację zdobytej wiedzy. Wypowiedź taka nie powinna jednak polegać na wypowiedzeniu kilku regułek (twierdzeń, definicji), ale wykazaniu się umiejętnością kojarzenia faktów, wyciągania wniosków i ich uzasadniania. Można oceniać też umiejętność dyskusji, wypowiedzi na określony temat z użyciem argumentowania lub stawiania hipotez. Krótkie wypowiedzi ustne niekoniecznie muszą być nagradzane stopniem, ale mogą być elementem systemu „zbierania” punktów na poszczególne oceny. Ocenianie wypowiedzi ustnych przyzwyczaja ucznia do systematycznej pracy i aktywnego uczestnictwa w procesie lekcyjnym. Sprawdzamy nie tylko wiadomości z poprzednich lekcji, ale oceniamy wypowiedzi w czasie realizacji nowego tematu. Daje to nauczycielowi informację o stopniu trudności bieżących zadań;
* sprawdziany pisemne krótkie, 10–15 minutowe, lub dłuższe, całogodzinne. Mogą one zawierać zadania zarówno otwarte, jak i zamknięte. Kartkówki to sprawdziany z niewielkiej partii materiału. Pozwalają na szybką kontrolę stopnia opanowania wybranych umiejętności przez poszczególnych uczniów lub grupy uczniów. Dłuższe prace sprawdzają umiejętności z większej partii materiału, zwykle całego działu. Bardzo ważne jest omówienie sprawdzianu pod kątem zadań, które sprawiły najwięcej trudności. Stosowanie dokładnych schematów punktowania zadań, w miarę jednolitych przez cały rok szkolny, pomoże uczniom w wypadku zróżnicowanego stopnia zadań wybrać te, które odpowiadają ich możliwościom intelektualnym, i określić, czy właściwie przygotowali się do sprawdzianu;
* prace domowe zróżnicowane, pobudzające do wysiłku twórczego. Należy zadawać zadania domowe o różnym stopniu trudności. Pozwoli to poznać możliwości intelektualne poszczególnych uczniów i ich poziom motywacji do nauki. Podejmowane przez młodzież próby nie zawsze doprowadzą do celu, ale analiza sposobu dochodzenia do rozwiązania pomoże nauczycielowi we wskazaniu uczącemu się właściwych metod i sposobów pracy;
* prezentacje prac przygotowanych indywidualnie bądź w grupach. Mogą to być referaty, prace projektowe. Ocena prac pozwoli na zbadanie umiejętności wykorzystania reprezentacji, matematyzowania problemów z otaczającej rzeczywistości, a także generowania nowych pomysłów. Prace długoterminowe dają możliwość młodzieży mniej zainteresowanej matematyką na łączenie swoich zainteresowań z przedstawianą problematyką;
* pracę ucznia bądź grupy uczniów. Zwracamy wtedy szczególną uwagę na planowanie, organizację i sposób pracy w grupie, stosowaną strategię.

Warto zachęcać uczniów do stosowania ocen koleżeńskich i samooceny, które mogą być uzupełnieniem tych wyrażonych stopniem. Poszukiwanie metod obiektywizacji oceny jest bardzo trudne i może doprowadzić do zbytniego uszczegółowienia wymagań. Ocena powinna pomóc uczącemu się w planowaniu własnego rozwoju, dostarczyć nauczycielowi i rodzicom informacji o jego postępach, pomóc nauczycielowi w ewaluacji własnej pracy i odpowiednio zindywidualizować proces edukacyjny. Ocenianie nie powinno mieć charakteru represyjnego. Unikajmy stawiania ocen negatywnych, motywujmy, zachęcajmy, wspierajmy. Rozmawiajmy z poszczególnymi uczniami o przyczynach ich niepowodzeń oraz sposobach ich usuwania.

Na początku roku szkolnego warto zaplanować liczbę dłuższych sprawdzianów i przybliżone terminy ich przeprowadzania, określić cel każdego sprawdzianu, zakres obowiązującego materiału i badane umiejętności. Dobrze jest też zaproponować już we wrześniu tematykę prac długoterminowych, co pomoże uczniom w gromadzeniu odpowiednich materiałów i zbieraniu pomysłów. Karty obserwacji pracy grup można wypracować na początku klasy I wspólnie z uczniami, aby rozumieli, że w czasie zajęć nauczyciel nie musi oceniać każdej aktywności ucznia czy grupy. Obserwacje pracy grupy (ucznia) można prowadzić przez kilka kolejnych lekcji i dopiero wtedy wystawić ocenę. Będzie ona bardziej miarodajna i obiektywna.

Można w systemie oceniania połączyć średnią ważoną z procentowym przelicznikiem punktowym, na przykład:

0% – 39% – niedostateczny

40% – 49% – dopuszczający

50% – 74% – dostateczny

75% – 89% – dobry

90% – 99% – bardzo dobry

100% – celujący (lub ocena bardzo dobry + zadanie dodatkowe)

waga 3 – dłuższy sprawdzian, znaczące osiągnięcia ucznia

waga 2 – krótsze sprawdziany (np. kartkówki), samodzielne przygotowanie materiałów eksperckich do pracy na zajęciach i wystąpienie w charakterze eksperta, dłuższe prace badawcze

waga 1 – odpowiedzi ustne, prace projektowe, praca w grupach

Ten sposób jednak musi wynikać z ustaleń szkolnych i być oparty na rzetelnej diagnozie potrzeb oraz możliwości danej grupy uczniów.

Planując pracę z uczniami, nie należy zapominać o ważnych funkcjach oceny szkolnej: informacyjnej, motywacyjnej, różnicującej. Zatem diagnozę wstępną, prowadzoną w klasie I warto ułożyć właśnie pod tym kątem, starając się jednocześnie wyodrębnić potrzeby uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi (np. z niepełnosprawnością, ze szczególnymi zdolnościami, ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się, z chorobami przewlekłymi, z trudnościami adaptacyjnymi, w tym związanymi z wcześniejszym kształceniem za granicą).

Realizacja prezentowanego programu nauczania i korzystanie z obudowy dydaktycznej do niego przygotowanej (np. podręcznika) umożliwia dużą indywidualizację pracy z uczniami, w tym w ramach edukacji domowej.

Każda ocena wywołuje u ucznia wiele emocji, dobrze jest więc, gdy są to emocje pozytywne. Starajmy się tak dobierać zadania, aby były ciekawe i sprawdzające istotne umiejętności. Oceniając wykonaną pracę, nie skupiajmy się na wyniku liczbowym, ale doceńmy inwencję ucznia, oryginalność stosowanej metody, pomysłowość i prostotę rozwiązania.

VIII. Ocenianie uczniów o specjalnych i specyficznych potrzebach edukacyjnych

Oceniając uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi, należy pamiętać, aby

* zachęcać do samodzielnego wysiłku, współpracy oraz pokonywania trudności,
* inspirować do dalszych działań,
* umożliwiać rozwijanie zainteresowań.

Należy przy tym skorzystać z:

* informacji i zaleceń zawartych w opinii / orzeczeniu,
* informacji przekazywanych przez rodziców i ucznia,
* informacji specjalistów (pedagoga szkolnego).

Pracując z uczniami o specjalnych potrzebach edukacyjnych, trzeba:

* dostosować sposoby komunikowania się (np. formułować zdania pojedyncze, krótkie, zawierające niewiele informacji),
* stosować różne formy aktywności (metody podające i poszukujące),
* pokazywać konkretne zastosowania omawianych pojęć,
* stosować dodatkowe środki dydaktyczne (np. umożliwić tworzenie notatek za pomocą komputera).

Pracując z uczniami niepełnosprawnych, należy pamiętać, że:

* uczeń z niepełnosprawnością ruchową na lekcjach geometrii często wymaga pomocy, na przykład w manipulowaniu przyrządami geometrycznymi, na pozostałych warto umożliwić mu korzystanie z komputera,
* ucznia z uszkodzonym słuchem trzeba zapytać, czy rozumie treść zadania i potrafi ustalić kolejność czynności prowadzących do rozwiązania,
* do możliwości wzrokowych ucznia niedowidzącego należy dostosować materiał graficzny, pomoce do nauki geometrii mogą zawierać elementy wypukłe,
* dla ucznia przewlekle chorego warto opracować indywidualny program rozwoju, pozwalający na „skokowe” przyswajanie materiału i pomagać mu w nadrabianiu zaległości.

Uczniowie zdolni mają z reguły wysoką motywację do nauki. Jeśli są uzdolnieni kierunkowo, warto nawiązać współpracę na przykład z uczelnią wyższą, przygotowując dla nich dodatkowe zadania, problemowe, niekoniecznie mające jednoznaczne rozwiązania. Można opracować też indywidualny program lub tok nauki, indywidualną ścieżkę rozwoju.

Pracując z uczniami z dysfunkcjami (np. dysortografią, dysgrafią), należy zwrócić uwagę, że mają oni problemy między innymi z:

* rozwiązywaniem zadań tekstowych,
* odróżnianiem cyfr o podobnych kształcie (np. 8 i 3) czy znaków > i <,
* utrwaleniem wzrokowym złożonych figur geometrycznych,
* zapisywaniem i odczytywaniem liczb wielocyfrowych z zerami,
* lateralizacją.

W związku z tym, budując sprawdzian dla takich uczniów, trzeba:

* umożliwić im korzystanie z zestawu worów, twierdzeń i definicji,
* uwzględnić możliwość popełniania błędów rachunkowych (np. przestawienie przecinka, nieuwzględnienie zer końcowych w liczbie) oraz błędów w zapisie symboli (np. przedziałów liczbowych),
* obudować zadanie geometryczne rysunkiem figury płaskiej bądź bryły,
* zadanie wymagające zastosowania wielu wzorów bądź budowania skomplikowanej strategii dzielić na kilka łatwiejszych,
* zachęcać do graficznego przedstawiania problemów,
* oceniać holistycznie – uwzględniając tok rozumowania, a nie tylko wynik,
* pod treścią zadań zostawić miejsce na ich rozwiązanie (uniknie się wtedy błędów w przepisywaniu).